報告番号	※甲　　第　　号

主 論 文 の 要 旨

論文題目　The Non-stationary Ideal Over $\mathcal{P}_\kappa\lambda$
　　　　　($\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上の非定常イデアルについて)

氏　　名　薄葉 季路

論 文 内 容 の 要 旨

1900年に行われた国際数学者会議においてD. Hilbertが選んだ最も重要と思われる23個の未解決問題(後に「Hilbert 23の問題」として有名になる)の第一問題として選ばれたのが,「連続体問題」であった. 連続体問題とは, 実数連続体濃度と可算濃度の中間となる濃度は存在するかという問題である. この問題はK. Gödel, P. CohenらによってZFCからは決定不可能な命題であることが示され, 一応の決着がついた. 即ち, 標準的な集合論の公理系ZFCが無矛盾であるならば, これに連続体仮説の肯定, 否定のどちらを付け加えても矛盾が生じないことを示した. 集合論の下で殆ど全ての数学が展開可能であるので, この結果は現代数学では連続体問題の真偽は決定不可能であることを示している.

一方でGödelはこのような決着には満足せず, ZFC公理系が連続体問題を解決できないのは, 単に公理系に不足があるからであると論じ, ZFCに新しい公理を付け加えることで連続体問題を含む, ZFCからの独立命題を解決する方針を打ち出した. この公理は現在では巨大基数公理と呼ばれ, 簡単に言えば「非常に大きな集合が存在する」ことを主張する. 古典的な巨大基数は最小の無限基数$\aleph_0$が持つ「有限からの超越性」を一般化することで定義されている. ZFCに巨大基数公理を加えて集合論を展開する方針は, Hilbertプログラムになぞらえて「Gödelプログラム」と呼ばれている.

巨大基数公理はGödelが予想していたようには連続体問題を決定しないことが判明したが, 一方では巨大基数の存在がさまざまな独立命題, 特に実数の射影集合族の構造を望ましい形に決定することが近年の研究で明らかになってきている. これはGödelプログラムの正当性を示唆しているものと見ることができる.

また,連続体問題の決定とは別に, 巨大基数公理は「独立命題の分類」という新たな研究プログラムを生み出した. Gödelの第二不完全性定理により, 数学の公理系

T が無矛盾であることを主張する命題 CON(T) は T から証明不可能である．それゆえに，別の公理系 S から CON(T) が証明できるならば，公理系 S は T より (無矛盾性の意味で) 本質的に「強い」公理系であることがいえる．Gödel, Cohen らによる研究以降，ZFC より独立な命題 φ で，ZFC に φ を付け加えた公理系 ZFC $+\ \varphi$ が ZFC よりも先の意味で本質的に「強い」ものがいくつもあることが判明した．巨大基数公理自身がそのような命題の例であるが，一方で巨大基数公理を用いて独立命題の「強さ」を測ることができる．即ち，命題 φ に対して，CON(ZFC $+\ \varphi$) と CON(ZFC + LC) が同値となる巨大基数公理 LC を見つけることである．既存の巨大基数公理の強さはほぼ線型をなしているので，これにより，独立命題の強さを線型なものさしで計ることが可能になる．注目すべきことは，巨大基数公理自体は元来そのような目的のために導入されたものではないにも関わらず，非常に多くの独立命題が巨大基数公理のものさしで分類可能であることである．

巨大基数公理の幾つかは集合ブール代数上の強い性質を持つイデアルの存在で定義されているため，必然的にイデアル理論の研究が盛んに行われたが，その中で注目されてきた性質がイデアルの飽和性である．イデアルの飽和性は，そのイデアルがどれほど極大イデアルに近いかを表す指標と見なすことができる．強い飽和性を持つ正規イデアルの存在は，それ自身は巨大基数の存在を導かないが，巨大基数公理と同様にさまざまな独立命題を決定することが解っている．非定常イデアルと呼ばれるイデアルは典型的な正規イデアルであるので，このイデアルが強い飽和性を持つかどうかは，イデアル理論的にも，また独立命題の分類という観点からも非常に興味深い問題である．

本論文は，M. Gitik が 1985 年に発表した定理を本質的に拡張し，また，幾つかの関連する問題に対して解答を与えるものである．Gitik は $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ と呼ばれる構造上の非定常イデアルが局所的に強い飽和性を持つことの無矛盾性が，超コンパクト基数と呼ばれる巨大基数の存在から導かれることを示した．Gitik による証明は，一部未公表である結果を用いるなど，それ単体では正当化されにくい論法を用いている．本論文では，新たな強制概念を定義し，それを用いて Gitik が用いたものより簡明な別証明を与えている．それにより仮定となる巨大基数公理を弱めることに成功した．本論文で用いた論法は柔軟性に富んでおり，飽和性以外のさまざまな文脈に適用可能である．また，理論上飽和性を持ちうる最大の非定常イデアルが，実際に強い飽和性を持ちうることが無矛盾であることを示した．一般連続体仮説が $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上の非定常イデアルの局所的飽和性と整合的であるかどうは Gitik が同論文内で投げかけた問題であるが，本論文ではそれに対する部分解答を与えている．

本論文は以下のような構成になっている．第 1 章では Gödel, Cohen 以降の公理的集合論の歴史を概略してある．第 2 章は証明のために必要な定義，及び補題を列挙してある．第 3 章において，主要な道具である club shooting の概念を定義し，基

本性質, 及び無限回の反復などを調べている. 第4章では, 以後の基本となる論法を定義し, それを用いて一般連続体仮説と $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上の非定常イデアルの局所的飽和性が整合的であることを示してある. 第5章において, 第4章でもちいた論法に手を加えることにより, 非定常イデアルが $S(\kappa,\lambda)$ という定義可能な集合上で飽和性を持つモデルを構成した. 第6章で4,5章で構成したイデアルの飽和性に関して, ZFCから証明可能な幾つかの制限について論じている. 第7章は, λ が特異基数である場合の $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上の非定常イデアルの局所的飽和性についての概説である.