平成２９年度

名古屋大学大学院情報科学研究科
計算機数理科学専攻
入学試験問題

専門

平成２８年８月４日（木）
１２：３０～１５：３０

注意事項

１．試験開始の合図があるまでは、この問題冊子を開いてはならない。

２．試験終了まで退出できない。

３．外国人留学生は、日本語から母語への辞書１冊に限り使用してよい。
電子辞書の持ち込みは認めない。

４．問題冊子、解答用紙３枚、草稿用紙３枚が配布されていることを確認すること。

５．問題は線形代数、微分積分、離散数学、グラフ理論、数理論理学、確率・統計、量子力学、アルゴリズム設計法、オートマトン理論、プログラミングの１０題がある。このうち３題を選択して解答すること。なお、選択した問題名または問題番号を解答用紙の指定欄に記入すること。

６．全ての解答用紙の所定の欄に受験番号を必ず記入すること。
解答用紙に受験者の氏名を記入してはならない。

７．解答用紙に書ききれない場合は、裏面を使用してもよい。
ただし、裏面を使用した場合は、その旨、解答用紙表面右下に明記すること。

８．解答用紙は試験終了後に３枚とも提出すること。

９．問題冊子、草稿用紙は試験終了後に持ち帰ること。

問題 1. (線形代数)
以下の問に答えよ.

(1) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 4 & -2a \end{pmatrix}$ が正則 (regular, invertible) でないような実数 a の値をすべて求めよ.

(2) x, y, z を未知数とする連立一次方程式

$$\begin{cases} x & +2y & -z & = & b \\ 2x & +ay & +z & = & a \\ x & +4y & -2az & = & c \end{cases}$$

が任意の実数 a について解を少なくとも一組もつような実数 b, c の値をすべて求めよ.

問題 2. (微分積分学)
以下の各問に答えよ.

(1) $\ln(x+y^3) = y^4$ のとき, $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ. (ただし, $\ln x := \log_e x$.)

(2) 以下の不定積分を求めよ.

(i) $\displaystyle\int \frac{2\,dx}{(1+x)^2(1-x)}$.

(ii) $\displaystyle\int \frac{\tan x}{1+\sin x - \cos x} dx$.

問題 3. (離散数学)

正整数 (positive integer) n に対して，1 の原始 n 乗根 (primitive nth root of unity) 全体の集合を W_n で表す．以下の各問に答えよ．

(1) 互いに素 (relatively prime) な正整数 m, n に対して，

(i) $W_m^n = W_m$,

(ii) $W_{mn}^n = W_m$

を示せ．ただし，$A \subset \mathbb{C}$ に対して，$A^n = \{a^n \mid a \in A\}$ と定める．

(2) n が素数 (prime) のとき，n で割れない正整数 m に対して，

$$\Phi_m(X)\Phi_{mn}(X) = \Phi_m(X^n)$$

を示せ．ただし，Φ_l は円分多項式 (lth cyclotomic polynomial) :

$$\Phi_l(X) = \prod_{\zeta \in W_l} (X - \zeta)$$

である．

問題 4. (グラフ理論)

無向グラフ (undirected graph) $G = (V, E)$ を考え (ただし $|V| \geq 2$)，各頂点 $v \in V$ の次数 (degree) を d_v, G の最小次数を $\delta(G) = \min\{d_v \mid v \in V\}$ と記す．以下の各問に答えよ．

(1) 以下の各場合に対し，条件を満たすグラフの頂点数を答えよ．

(i) $|E| = 16$ かつすべての頂点 $v \in V$ に対し $d_v = 2$ である場合．

(ii) $|E| = 21$ であり，$d_v = 4$ である頂点が 3 つ存在し，しかも残りのすべての頂点 $v \in V$ に対し $d_v = 3$ である場合．

(2) すべての相異なる頂点 $u, v \in V$ に対し $d_u \neq d_v$ であるような連結 (connected) な単純 (simple) 無向グラフが存在するか否かを答え，その理由を述べよ．

ヒント．次数 d_v の取りうる範囲に注目せよ．

(3) 頂点 $u \in V$ から $v \in V$ $(u \neq v)$ にパス (path) が存在すれば，u から v に長さ $|V| - 1$ 以下のパスが存在することを示せ．なお，パスは単純とは限らない．

(4) 「任意の単純無向グラフ G に長さが少なくとも $\delta(G)$ の単純パスがある」

「任意の単純無向グラフ G に長さが少なくとも $\delta(G) + 1$ の単純閉路がある」

という 2 つの主張のそれぞれが正しいか否かを答え，その理由を述べよ．

ヒント．極大な単純パス (それ以上延ばせない単純パス) を考え，その終点が満たす性質に着目せよ．

注．自己ループ (self-loop) も多重辺 (multiple edges) も持たないグラフを単純グラフという．頂点 (vertex) と辺 (edge) の交互列 $v_1 e_1 v_2 e_2 \cdots e_{k-1} v_k$ (ただしすべての i に対して $v_i \in V$ かつ $e_i = (v_i, v_{i+1}) \in E$) をパス (path) と呼び，$v_k = v_1$ であるようなパスを閉路 (cycle, circuit) と呼ぶ．とくに $v_1, v_2, \ldots, v_k$ がすべて異なるパスを単純パス (simple path), $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$ がすべて異なる閉路を単純閉路 (simple cycle) と呼ぶ．パス (閉路) に含まれる辺の数をパス (閉路) の長さという．

問題 5. (数理論理学)

$\mathbf{N}$ を自然数全体の集合, つまり $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ とする. また $\mathbf{R}$ を実数全体の集合とする. このとき, 以下の各問に答えよ.

(1) $\mathbf{R}$ から $\mathbf{N}$ への写像全体の集合と, $\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}$ への写像全体の集合は, 等しい濃度 (cardinality) をもつことを示せ.

(2) $\mathbf{R}$ から X への写像全体の集合と, X 自身が等しい濃度をもつような集合 X を一つ見つけよ.

問題 6. (確率・統計)

2 次元平面 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 A, B をそれぞれ

$$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\},$$
$$B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x_1 \leq 2,\ -2 \leq x_2 \leq 2\}$$

とする．点 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して関数 $I_A(\boldsymbol{x})$ を

$$I_A(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \boldsymbol{x} \in A, \\ 0, & \boldsymbol{x} \notin A \end{cases}$$

と定める．以下の各問に答えよ．

(1) $X_1, \ldots, X_n$ を，B 上の一様分布 (uniform distribution) に独立にしたがう確率変数 (random variable) とする．a を定数とし，

$$Y = \frac{a}{n} \sum_{i=1}^{n} I_A(X_i)$$

とする．Y の期待値 (expectation) が円周率 (circular constant) π に一致するように a を定めよ．

(2) (1) で定めた Y の分散 (variance) を求めよ．

(3) B の部分集合 C を

$$C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x_1 \leq 2,\ 0 \leq x_2 \leq 1\}$$

と定める．B 上の確率密度関数 (probability density function) $p(\boldsymbol{x})$ を，$\boldsymbol{x} \in B$ に対して次のように定める．

$$p(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} q, & \boldsymbol{x} \in C, \\ r, & \text{その他}. \end{cases}$$

ただし q, r は正の定数とする．$X'_1, \ldots, X'_n$ を，$p(\boldsymbol{x})$ から定まる確率分布 (probability distribution) に独立にしたがう確率変数とし，

$$Z = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{I_A(X'_i)}{p(X'_i)}$$

とする．Z の分散を最小にする q の値を求めよ．

問題 7. (量子力学)

$A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ および $M(\tau) = \begin{pmatrix} \cos\tau & i\sin\tau \\ i\sin\tau & \cos\tau \end{pmatrix}$ とする．ただし，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位 (imaginary unit)，$\tau \in \mathbb{R}$ とする．以下の各問に答えよ．

(1) A が観測量 (observable) を表すことを示せ．

(2) A の固有値 (eigenvalue) と固有状態 (eigenstate) を与えよ．

(3) すべての $\tau \in \mathbb{R}$ について，$M(\tau)$ がユニタリ行列であることを示せ．

(4) 閉じた量子系 Q が時刻 $t = 0$ で A の最大固有値 (maximum eigenvalue) に対応する固有状態にあるとする．$M(\tau)$ は時刻 $t = 0$ から時刻 $\tau > 0$ までの Q の時間発展を表す行列とする．このとき，時刻 $t = \frac{\pi}{4}$ における Q の状態を表すベクトルを記せ．

(5) 状態が $|\psi\rangle$ であるときの観測量 A のバリアンス (variance) は，$\sigma(A)^2 = \langle\psi|A^2|\psi\rangle - \langle\psi|A|\psi\rangle^2$ と定義される．このとき，問 (4) の条件のもとで $\sigma(A)^2$ が最大となる最初の時刻 $\tau^* > 0$ を求めよ．

問題 8. (アルゴリズム設計法)

n 種類のコインがあり，コイン j ($\in \{1, 2, \ldots, n\}$) の額面 (face value) は v_j, 重さは w_j であるとする．例えば10円玉，50円玉，100円玉の3種類のコインを考え，それぞれの重さが 4500, 4000, 4800 mg であるとき，$n = 3$, $v_1 = 10$, $v_2 = 50$, $v_3 = 100$, $w_1 = 4500$, $w_2 = 4000$, $w_3 = 4800$ である．おつりの額が y であるとき，おつりとして渡すコインの重さの総和を最小にしたい．以下では n, y, v_j, w_j ($j \in \{1, 2, \ldots, n\}$) は正整数であるとし，$w_1/v_1 \geq w_2/v_2 \geq \cdots \geq w_n/v_n$ および $v_1 = 1$ を仮定する．以下の各問に答えよ．

(1) 渡すコインの重さの総和を最小にするコインの組合せを求める問題を整数計画問題 (integer programming problem) として定式化せよ．このとき，コイン j ($\in \{1, 2, \ldots, n\}$) を使う枚数を x_j ($\in \{0, 1, 2, \ldots\}$) とせよ．

(2) コイン $1, 2, \ldots, k$ のみを使って額 y を実現するコインの重みの総和の最小値を $f_k(y)$ とする．$f_k(y)$ に関する動的計画法 (dynamic programming) の漸化式 (recurrence formula) を書け．

(3) コイン $1, 2, \ldots, k$ のみを使って額 y を実現するとき，まずコイン k を最大枚数 $\lfloor y/v_k \rfloor$ 使い，次に残額に対してコイン $k-1$ を最大枚数使い，さらに残額に対してコイン $k-2$ を最大枚数使う，というように，額面あたりの重み w_j/v_j の小さい順になるべく多くコインを使う方法を考える．この方法を欲張り法 (greedy method) と呼ぶ．コイン $1, 2, \ldots, k$ に対して欲張り法を用いて実現される重みの総和は漸化式

$$g_1(y) = w_1 y$$
$$g_k(y) = w_k \lfloor y/v_k \rfloor + g_{k-1}(y \,\%\, v_k), \quad (2 \leq k \leq n)$$

(ただし $a \,\%\, b = a - b\lfloor a/b \rfloor$) で表される．以下の各問に答えよ．

(i) $n \leq 2$ の場合にこの欲張り法によって最適解が常に得られることを示せ．

(ii) $n \geq 3$ の場合にこの欲張り法が最適解を得ることを保証できるか否かを答えよ．保証できる場合は証明を，できない場合は反例を挙げよ．

注．整数計画問題は，

$$\begin{array}{lll} \text{最小化} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \text{制約条件} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, & i = 1, 2, \ldots, m \\ & x_j \in \{0, 1, 2, \ldots\}, & j = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

と書ける問題である．ここで x_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) は決定変数，n, m, c_j, a_{ij}, b_i ($i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$) は所与の定数である．

問題 9. (オートマトン理論)
アルファベット (alphabet) $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Gamma = \{a, b, c\}$ とする．以下の各問に答えよ．

(1) 次のそれぞれの言語を認識する決定性有限オートマトン (deterministic finite automaton) を図示せよ．

(i) $L_1 = \{w \mid w \in \Sigma^*,\ w$ は 0 で終る $\}$
(ii) $L_2 = \{w \mid w \in \Sigma^*,\ w$ は 0 または 01 で終る $\}$

(2) $h(a) = \varepsilon$, $h(b) = 1$, $h(c) = 00$ で定まる準同型写像 (homomorphism) $h : \Gamma^* \to \Sigma^*$，ならびに，正規表現 (regular expression) $(ac)^*(bc)^*$ が表す言語 L_3 について，言語 $h(L_3)$ を正規表現かあるいは決定性有限オートマトンの形式で示せ．

(3) 正規言語 (regular language) について，以下の補題が成立する．

> L を正規言語とする．このとき，L に依存する長さ $n \geq 1$ が存在して，L に属するいかなる長さ n 以上の文字列 w についても以下を満たす分解 $w = xyz$ がある．
>
> (i) $|y| \geq 1$
> (ii) $|xy| \leq n$
> (iii) いかなる $k \geq 0$ に対しても，xy^kz は L に属する

この補題を利用して，言語 L_4 が正規言語でないことを証明せよ．

$$L_4 = \{1^k 0^{2k} \mid k \geq 0\}$$

(4) 正規言語は積集合 (intersection) ならびに補集合 (complement) について閉じている．これらの事実を利用して，次の言語 L_5 が正規言語でないことを示せ．

$$L_5 = \{1^k 0^{2\ell} \mid k, \ell \geq 0,\ k \neq \ell\}$$

問題 10. (プログラミング)

プログラム P は，与えられた整数の配列 **numbers**(s 個の要素を持つ)を **numbers**[0]≦**numbers**[1]≦…≦**numbers**[s-1]となるようソートする C言語プログラムである．プログラム P に対して以下の問いに答えよ．

(1) 11, 14 行目の空欄 A, B, C, D にあてはまる式を答えよ．

(2) 29, 30 行目の空欄 E, F, G にあてはまる式を答えよ．

(3) 2 行目の定数 **N** の定義は 36 行目の配列宣言 **numbers**[6]の添え字に応じて変更しなければならない場合がある．36 行目の **numbers** の配列宣言の添え字を m とし，**N** が最低いくらでなければならないか m を使って答えよ．

(4) プログラム P の実行結果として標準出力に表示される結果を答えよ．

(5) プログラム P の 18 行目のコメント開始記号 "/*"とコメント終了記号"*/"を削除したときのプログラムをプログラム P'とする．P'において，18 行目がはじめて実行されたときに標準出力に出力される実行結果を書け．

(6) プログラム P の 22 行目のコメント開始記号"/*"とコメント終了記号"*/"を削除したときのプログラムをプログラム P''とする．P''において，22 行目が 3 回目に実行されたときに標準出力に出力される実行結果を書け．

プログラム P (行頭の数字は行番号を表す)

```
1   #include<stdio.h>
2   #define N 10
3   void func1(int* numbers, int start, int size) {
4     int h, i, j, k, tmp[N] = {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0};
5
6     h = size / 2;
7     i = start;
8     j = start + h;
9     for (k = 0; k < size; k++) {
10      if ((j == start + size) || (i < start + h) && (numbers[i] <= numbers[j])) {
11        [    A    ] = [    B    ];
12        i++;
13      } else {
14        [    C    ] = [    D    ];
15        j++;
16      }
17    }
18  /* printf("%d,%d,%d,%d,%d,%d¥n", tmp[0], tmp[1], tmp[2], tmp[3], tmp[4], tmp[5]); */
19    for (k = 0; k < size; k++) {
20      numbers[start + k] = tmp[k];
21    }
22  /* printf("%d,%d,%d,%d,%d,%d¥n", numbers[0], numbers[1], numbers[2], numbers[3],
    numbers[4], numbers[5]); */
23  }
```

```
void func2(int* numbers, int start, int size) {
  int h;
  printf("%d, %d¥n", start, size);
  if (size > 1) {
    h = size / 2;
    func2(numbers, start, [   E   ]);
    func2(numbers, [   F   ], [   G   ]);
    func1(numbers, start, size);
  }
}

void main(int argc, char** argv) {
  int numbers[6] = {3, 2, 5, 4, 6, 1 };

  func2(numbers, 0, 6);
}
```

Translation of technical terms

プログラム	program	式	expression
整数	integer	定数	constant
配列	array	宣言	declaration
要素	element	添え字	index
ソート	sort	標準出力	standard output
C 言語	C programming language	コメント	comment