平 成 ２１年 度

名古屋大学大学院情報科学研究科
計算機数理科学専攻
入 学 試 験 問 題

専　　　　　門

平成２１年２月１２日（木）
１２：３０〜１４：００

注 意 事 項

１．試験開始の合図があるまでは、この問題冊子を開いてはならない。

２．試験終了まで退出できない。

３．（外国人留学生は、日本語から母国語への辞書１冊に限り使用してよい。
電子辞書の持ち込みは認めない。）

４．問題冊子、解答用紙２枚、草稿用紙２枚が配布されていることを確認せよ。

５．問題は、数学基礎（線形代数、微分積分）、離散数学の３題からなる。
このうち２題を選択して解答せよ。

また、選択した問題名または問題番号を解答用紙の指定欄に記入せよ。

６．解答用紙は指定欄に受験番号を必ず記入せよ。解答用紙に受験者の氏名を記入してはならない。

７．解答用紙は試験終了後に２枚とも提出せよ。

８．問題冊子、草稿用紙は試験終了後に持ち帰ってよい。

問題 1. (線形代数)

以下の問に答えよ.

(1) 3 個のベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ a \\ 3 \end{pmatrix}$ が線形独立 (一次独立) にならない a の値を求めよ.

(2) 次の漸化式で定義される数列 a_n を考える.

$$\begin{cases} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 1 \\ a_{n+2} &= a_{n+1} + a_n \end{cases}$$

このとき，以下の問に答えよ.

(i) 任意の $n\ (= 0, 1, 2, \ldots)$ に対して，$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$ となる行列 A を求めよ.

(ii) A を対角化する行列 P と，P により対角化した行列 $P^{-1}AP$ を求めよ.

(iii) A^n を求めよ.

(iv) (iii) の結果を用いて a_n の一般項を求めよ.

問題 2. (微分積分)

以下の問に答えよ．

(1) R を正の実数とする．以下の問に答えよ．

(i) $\displaystyle\int_0^R xe^{x^2}dx$ を求めよ．

(ii) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}\mid x^2+y^2\leq R^2\}$ とするとき，$\displaystyle\iint_D e^{x^2+y^2}dxdy$ を求めよ．

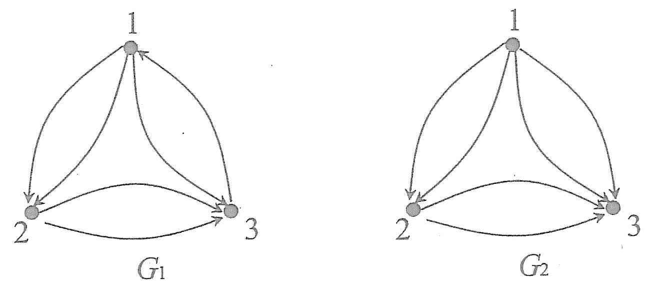
(iii) $\displaystyle\sqrt{e^{R^2}-1}\leq\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^R e^{x^2}dx\leq\sqrt{e^{2R^2}-1}$ を示せ．

(2) $f(x,y)=x^4+2x^2+y^2-4xy+1$ の極値を求めよ．

問題３．(離散数学)

$G=(V,E)$ を n 頂点有向グラフとする．頂点集合を $V=\{1,2,\ldots,n\}$ とするとき，頂点 i から j への有向辺 (i,j) の本数を a_{ij} とし，$n\times n$ 行列 $A=(a_{ij})$ を有向グラフ G の隣接行列と呼ぶ．また，G の有向辺の列 $(v_0,v_1),(v_1,v_2),\ldots,(v_{k-1},v_0)$ を長さ k の有向サイクルと呼ぶ．以下の問に答えよ．

(1) 下の有向グラフ G_1, G_2 の隣接行列をそれぞれ A_1, A_2 とするとき，$i=1,2$ に対して，A_i^2, A_i^3 を求めよ．



(2) 有向グラフ G の隣接行列を A とするとき，A^2 の (i,j) 成分の値は何を表すか，また，A^m の (i,j) 成分の値は何を表すか，グラフの言葉で述べよ．

(3) 有向グラフ G が有向サイクルを持たないことと $A^n=O$ であることは同値であることを示せ．ただし，O は零行列である．